Center for Cultivation of Mathematical Science
www.ccmscalcutta.org
ccmscalcutta@gmail.com

তৃতীয় দিন

থাকদাঁড়ি তিনদাঁড়ি

সংখ্যাদের দলাদলির কথা মনে আছে তো?

- ২-এর নিরিখে সব সংখ্যাকে দুই দলে ভাগ করা যায়
    - জোড় = সে সব সংখ্যা যাদের ২ দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ ০
    - বিজোড় = সে সব সংখ্যা যাদের ২ দিয়ে ভাগ করলে ভাগ শেষ ১
- ৩ এর নিরিখে সব সংখ্যাকে তিন দলে ভাগ করা যায়
    - গোলাম = সে সব সংখ্যা যাদের ৩ দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ ০
    - রানি = সে সব সংখ্যা যাদের ৩ দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ ১
    - রাজা = সে সব সংখ্যা যাদের ৩ দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ ২

এই সংখ্যাদের দলাদলির ব্যাপারটা আমরা দ্বিতীয় দিনে খুঁটিয়ে দেখেছি।

জার্মান গণিতজ্ঞ গাউস, এই দলাদলির কারবারটা একদম জমিয়ে দিলেন অষ্টাদশ শতাব্দীর গোড়ার দিকে।

ইক্যুয়াল টু (সমান সমান) চিহ্নতে যেমন দুটো দাঁড়ি লম্বালম্বি ভাবে থাকে, তেমনি গাউস একটা নতুন চিহ্ন বানিয়ে ফেললেন, তিনটে দাঁড়ি দিয়েঃ

$$\equiv$$

এই চিহ্নটার নাম cogruency (কনগ্রুয়েন্সি)। শব্দটার আক্ষরিক অর্থ হচ্ছে 'সম'। যে সংখ্যাগুলো একই রকম 'দেখতে' গাউস তাদের নাম দিলেন 'কনগ্রুয়েন্ট সংখ্যা'।

দুটি সংখ্যা তখনই 'কনগ্রুয়েন্ট' যদি তারা একই দলের হয়। কিন্তু দলাদলি করতে হলে প্রথমে মাপকাঠি ঠিক করতে হবে। ধরা যাক যদি ২ আমাদের মাপকাঠি হয়, তাহলে ৬ এবং ৯ আলাদা দলে (কারণ ৬ হচ্ছে জোড় আর ৯ হল বিজোড়)।

কিন্তু ৩ যদি মাপকাঠি হয়, তাহলে ৬ এবং ৯, দুটোই একই দলের (দুটো সংখ্যাকেই ৩ দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ শুণ্য পাওয়া যায়)।

৩.১ ১১র নিরিখে সংখ্যাদের কতগুলো দল বানানো যায়? কোনো একটা দলের পাঁচটা সংখ্যা লিখে ফেলো।

যদি দুটো সংখ্যা একই দলের হয় (কোনো এক মাপকাঠির নিরিখে), তাহলে তাদের আমরা কনগ্রুয়েন্ট সংখ্যা বলব। লেখার কায়দাটা হচ্ছেঃ

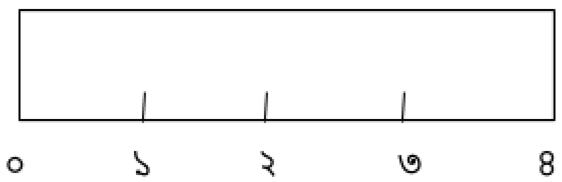
$$6 \equiv 9 \ mod \ 3$$

Mod কথাটার অর্থ হচ্ছে 'মাপকাঠি'। ওপরের কনগ্রুয়েন্সিটা পড়তে হবে এভাবেঃ six congruent to nine modulo three.

৩.২ $11 \equiv 21 \ mod \ 5$: এই কনগ্রুয়েন্সিটা ঠিক না ভুল? চারটে আলাদা আলাদা মাপকাঠির নিরিখে, চারটে **ভুল** কনগ্রুয়েন্সি তৈরি করো।

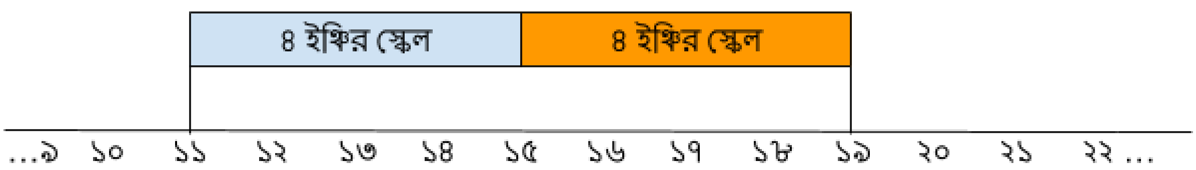
কনগ্রুয়েন্সির জ্যামিতি

মনে করো 'মাপকাঠি' সংখ্যাটা হলো একটা রুলার (বা স্কেল)। যেমন ধরো মাপকাঠি যদি হয় ৪ (চার), তাহলে, তাকে একটা চার ইঞ্চি লম্বা স্কেল হিসেবে ভাবতে পারো।



দুটো সংখ্যা ৪ এর নিরিখে 'কনগ্রুয়েন্ট হবে', যদি তাদের মধ্যেকার দুরত্বকে ৪ এর নিরিখে মেপে ফেলা যায়।

ধরা যাক ১১ আর ১৯। তাদের মধ্যেকার দুরত্ব হচ্ছে ৮। তাহলে ৪ ইঞ্চি লম্বা স্কেলটা দুবার ব্যবহার করে আমরা ঐ দুরত্বটা মেপে ফেলতে পারি।

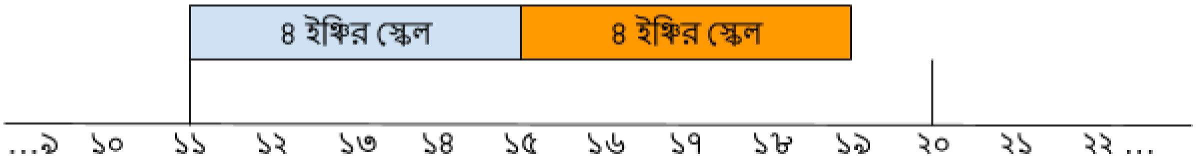


Author: Ashani Dasgupta
www.ccmscalcutta.org

যদি মাপা না যায়। তাহলে সংখ্যা দুটো (ঐ স্কেলের নিরিখে) কনগ্রুয়েন্ট নয়। সেক্ষেত্রে আমরা এভাবে লিখতে পারিঃ

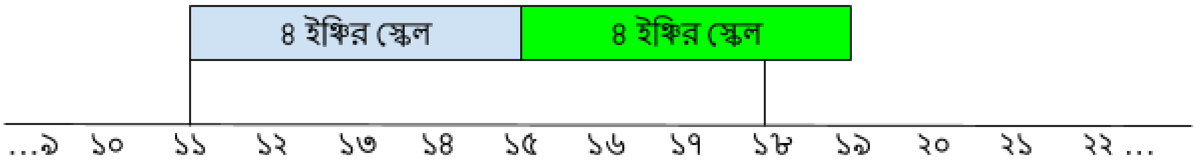
$$11 \not\equiv 20 \mod 4$$

দুটি উদাহরণ (কখন দুটো সংখ্যা কনগ্রুয়েন্ট নয়)



( )

,



( )

,

মাথায় রাখতে হবে যে, স্কেলের টুকরো গুলো একদম খাপে খাপে বসে যাওয়া চাই। 'ছাপিয়ে' গেলে হবে না।

সোজা কথায়, a এবং b কনগ্রুয়েন্ট মডিউলো d মানে, |a-b| কে d দিয়ে ভাগ করা যাবে। আমরা |a-b| লিখেছি কারণ, আমাদের শুধু দুরত্ব নিয়ে কারবার। ১১ থেকে ১৯ এর যা দুরত্ব, ১৯ থেকে ১১র ও তাই দুরত্ব।

(|a-b| মানে (প্রথম এবং শেষের দাঁড়িটা দেওয়ার অর্থ হল), a-b বার করে, তার পজিটিভ মানটা নিতে হবে।

উদাহরণঃ |৫ - ৭| = ২ = |৭ - ৫| => শুধু সংখ্যা দুটোর দুরত্বটা হিসেব করতে হবে)

Author: Ashani Dasgupta
www.ccmscalcutta.org

কনগ্রুয়েন্সি চিহ্নকে দেখতে ইকুয়্যালিটির মত কেন?

আসলে কনগ্রুয়েন্সি (≡) আরে ইক্যুয়ালিটির (=) মধ্যে অনেক মিল আছে। সে জন্যে দুটো চিহ্নকে দেখতেও খানিকটা একরকম।

মিলগুলো আমরা এর পরের সারণী থেকে বুঝে নেব। কনগ্রুয়েন্সির ক্ষেত্রে আমাদের একটা মাপকাঠিও প্রয়োজন। একটা স্কেলের টুকরো যার নিরিখে আলোচনা হবে। ধরে নেওয়া যা মাপকাঠিটার মাপ হল d।

এবার মিল গুলো দেখা যাকঃ

কি মিল?	**=**	**≡ mod d**
রিফ্লেক্সিভ	যে কোনো সংখ্যা নিজের সাথে সমান a = a	যে কোনো সংখ্যা নিজের মডিউলো d $a \equiv a \bmod d$ কেন? কারণটা একটু অদ্ভুত শোনাতে পারে। a থেকে a অবধি মাপতে গেলে ০ খানা d এর টুকরো বসালেই হবে। বীজগাণিতিক পদ্ধতিতে বলা যায় যে d দিয়ে a-a কে ভাগ করা সম্ভব। কারণ a-a = 0 আর 0 কে যে কোনো সংখ্যা দিয়েই ভাগ করা সম্ভব।
সিমেট্রিক	যদি a = b হয়, তাহলে b = a ও সত্যি।	$a \equiv b \bmod d$ দেওয়া আছে। তাহলে $b \equiv a \bmod d$ ও সত্যি। কেন? a থেকে b অবধি যা দুরত্ব, বি থেকে এ অবধিও তাই। অতএব এ থেকে বি অবধি যদি ডি দিয়ে মাপা যায়, তাহলে বি থেকে এ অবধিও ডি দিয়ে মাপা যাবে।

		বীজগাণিতিক উপায়ঃ $a \equiv b \bmod d$ মানে a-b কে d দিয়ে ভাগ করা সম্ভব। মানে a-b = dQ (Q হচ্ছে ভাগ ফল)। তারমানে b - a = d (-Q) তার মানে b - a কেও d দিয়ে ভাগ করা যায় , অতএব $b \equiv a \bmod d$
ট্রান্সিটিভ	a=b, b= c যদি হয় তাহলে, a=c ও সত্যি।	**৩.৩** প্রমাণ করো যে, কনগ্রুয়েন্সিও ট্রান্সিটিভ। অর্থাৎ যদি জানা থাকে যে $a \equiv b \bmod d$, $b \equiv c \bmod d$, তাহলে দেখাও যে $c \equiv a \bmod d$ । প্রথমে জ্যামিতিক যুক্তি দাও, তারপরে বীজগাণিতিক প্রমাণ দাও।

এছাড়াও ইক্যুয়ালিটি আর কনগ্রুয়েন্সির মধ্যে বিস্তর মিল আছে। এগুলো আমরা পরের অঙ্ক গুলোতে দেখব।

৩.৪ প্রমান করো $a \equiv b \bmod d$ যদি হয়, এবং c যদি কোনো একটি পূর্ণ সংখ্যা হয়, তাহলে,

- $a + c \equiv b + c \bmod d$
- $a - c \equiv b - c \bmod d$
- $ac \equiv bc \bmod d$

৩.৫ ধরা যাক $a \equiv b \bmod d$ এবং $m \equiv n \bmod d$ । তাহলে প্রমাণ করোঃ

- $a + m \equiv b + n \bmod d$
- $a - m \equiv b - n \bmod d$
- $am \equiv bn \bmod d$
- $a^k \equiv b^k \bmod d$ (k একটি পজিটিভ ইন্টিজার)।