Center for Cultivation of Mathematical Science
www.ccmscalcutta.org
ccmscalcutta@gmail.com

দ্বিতীয় দিন

ভাগশেষের একশেষ

কথায় বলে সব ভালো যার শেষ ভালো।

ভাগশেষরা কিন্তু সত্যিই খুউব ভালো। শান্তশিষ্ট যাকে বলে। একটা এক্সপেরিমেন্ট করা যাক। তাহলে কারণটা বোঝা যাবে।

১। একটা বিভাজক বেছে নাও। ধরা যাক ৯।

২। দুটো সংখ্যা বেছে নাও। ধরা যাক ৪৭ আর ৮৪।

৩। সংখ্যা দুটোকে ৯ দিয়ে ভাগ করলে, ভাগশেষ কত থাকে?

৪৭ --- ৯ দিয়ে ভাগ করে ভাগশেষ থাকে ---> ২ (*)
৮৪ --- ৯ দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ থাকে ---> ৩ (**)

৪। এবার ৪৭ × ৮৪ --- ৯ দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ থাকবে ---> ?

চার নম্বর সওয়ালটার জবাব একটু খাটলেই বেড়িয়ে যাবে। প্রথমে ৪৭ কে ৮৪ দিয়ে গুণ করো। ৩৯৪৮ হবে।

এবার ৩৯৪৮ কে ৯ দিয়ে ভাগ করে ফেলো। ভাগফল হবে ১৪১ আর ভাগশেষ ৬।

এবার একটা মজার ব্যাপার লক্ষ করো। (*) এবং (**) লাইনে পাওয়া ভাগশেষ দুটোকে গুণ করলেও ৬ পাচ্ছি! মানে এত্ত না খেটে, দুটো আলাদা আলাদা সংখ্যা থেকে পাওয়া ভাগশেষ গুলোকে গুণ করলেই, উত্তর পেয়ে যেতাম।

কিন্তু এটা কাকতালিয় নয় তো? এই নিয়মটা কি সব সময় খাটবে?

২.১ আরেকটা এক্সপেরিমেন্ট করো। বিভাজক কে নাও ১৭। দুটো সংখ্যা নাও মনের মতন। এবার দেখো প্রথমে পাওয়া দুটো ভাগশেষকে গুণ করলে, শেষমেশ পাওয়া ভাগশেষের সাথে মিলছে কিনা।

আমরা ভাগশেষের এই মজার চরিত্রটা আরেকটু খুঁটিয়ে দেখব। কিন্তু তার আগে দেখাযাক যে আমরা হঠাৎ করে ভাগশেষ নিয়ে এতো লড়ে যাচ্ছি কেন।

প্রথম দিনে দেখেছি যে সংখ্যা অসংখ্য। যৌগিক সংখ্যা গুলোকে বাড়ি আর মৌলিক সংখ্যা গুলোকে ইঁট ভাবলেও খুব লাভ হচ্ছে না। কারণ মৌলিক সংখ্যাও অসংখ্য (এই অংকটা করেছ তো?)।

অসীম সংখ্যক সংখ্যাকে নিয়ে কায়দা করা, চাট্টিখানি কথা নয়। তাই আমরা মাঝে সাঝে সংখ্যা গুলোকে কয়েকটা দলে ভাগ করে দিই। এই দলগুলোর সংখ্যা যদি অল্প হয়, তাহলেই কেল্লাফতে। অসীম সংখ্যক সংখ্যাকে বাগে পাওয়া যাবে এই কয়েকটা দলের মাধ্যমে। আলাদা করে প্রত্যেকের কাছে ছুটতে হবে না।

এই দলাদলির কারবার তোমরা কিন্তু করেই থাকো।
জোড় - বিজোড় হচ্ছে এক ধরণের দল। জোড় সংখ্যারা একটা দল, বিজোড় সংখ্যারা আরেকটা।

ভেবে দেখ, সব সংখ্যাই কিন্তু এই দুই দলের কোনও একটাতে আছে। যে গুলো দুই দিয়ে ভাগ যায় সে গুলো জোড়। যে গুলো যায় না, সে গুলো বিজোড়।

এবার এই দলাদলিটাকে আরেকটু তলিয়ে দেখা যাক।

যে কোনো সংখ্যাকে ২ দিয়ে ভাগ করলে, ভাগশেষ হয় হবে ০ (যদি পুরো ভাগ যায়) অথবা ১।

ভাগশেষ ০ = জোড়
ভাগশেষ ১ = বিজোড়।

২.২ তাহলে ০ টা কোন দলে? জোড় না বিজোড়?

Author: Ashani Dasgupta
www.ccmscalcutta.org

এবার দেখো, আমরা ২ এর নিরিখে সব সংখ্যাকে যেমন দুই দলে ভাগ করেছিলাম (কারণ ভাগশেষ দুই রকম হতে পারে), তেমনি ৩-এর নিরিখে সব সংখ্যাকে তিন ভাগে ভাগ করতে পারি।

যে কোনো সংখ্যাকে ৩ দিয়ে ভাগ করলে, তিন রকম ভাগশেষ হতে পারেঃ ০, ১, ২। এই নিরিখে আমরা সবসংখ্যাকে তিন দলে ভাগ করে নিতে পারি।

দলের নাম গুলো ধরা যাকঃ

ভাগশেষ ০ = গোলাম
ভাগশেষ ১ = রানি
ভাগশেষ ২ = রাজা।

৩৪ সংখ্যাটা কোন দলে? ৩৪ কে ৩ দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ হয় ১ (৩৪ = ৩ × ১১ + ১)। তার মানে ৩৪ রানিদের দলে।

২.৩ রাজাদের দলে প্রথম দশটা পজিটিভ সংখ্যা কি কি?

২.৪ প্রমাণ করো যে দুটো গোলাম সংখ্যাকে যোগ করলে বা গুণ করলে আরেকটা গোলাম সংখ্যা পাওয়া যায়।

২.৫ দুটো রাজা সংখ্যাকে গুণ করলে কি আরেকটা রাজা সংখ্যা পাওয়া যাবে?

অতএব এবার খানিকটা বোঝা যাচ্ছে যে 'ভাগশেষ' জানাটা কেন জরুরি। ভাগশেষ জানলে বোঝা যাবে সংখ্যাটা কোন দলে।

২.৬ চার এর নিরিখে সমস্ত সংখ্যাকে চারটে দলে ভাগ করো। প্রতিটি দলের প্রথম ৭টি ঋণাত্মক (negative) সংখ্যা লিখে ফেলো।

এবার আদত প্রশ্নটা হচ্ছে, সংখ্যা দুটোকে গুণ করলে, ভাগশেষটাও গুণ হয়ে যাচ্ছে কেন? (আমাদের এক্সপেরিমেন্টটা মনে আছে তো?)

আরেকটা পরীক্ষা করে দেখা যাক।

Author: Ashani Dasgupta
www.ccmscalcutta.org

বিভাজকঃ ১৪
সংখ্যা দুটোঃ ৪৬, ৭২

৪৬ ---- ১৪ দিয়ে ভাগ দিলে --- ৪ (ভাগশেষ)
৭২ ---- ১৪ দিয়ে ভাগ দিলে --- × ২ (ভাগশেষ)
------
৪৬ × ৭২ --- ১৪ দিয়ে ভাগ দিলে ৮ (ভাগশেষ হওয়া উচিৎ যদি আমাদের ভাগশেষ গুণ হয়ে যাওয়ার নিয়মটা সত্যি হয়)।

৪৬ কে ৭২ দিয়ে গুণ করলে হয় ৩৩১২। ১৪ দিয়ে ৩৩১২ কে ভাগ দিলে, ভাগফল হয় ৯২। **আর ভাগশেষ ৮! ঠিক যেমনটি আমরা আন্দাজ করেছিলাম হবে।**

এই বেলা গণিত করার একটা প্রধান কায়দা বলে দিই। প্রখ্যাত গণিতজ্ঞ তাদেশি তোকিয়েদা একবার বলেছিলেন যে গণিত করতে গিয়ে সব সময় 'আন্দাজ' করার চেষ্টা করবে কি হচ্ছে আর কি হতে পারে (যন্ত্রের মত ফর্মুলা বসানো বা দ্রুত যোগ, গুণ করে ফেলাটা গণিত নয়)। আর তোমার আন্দাজটা জোরে জোরে বন্ধুদেরকে বলবে। তাহলে তোমার মনে একটা তাগিদ আসবে যে যেটা তুমি আন্দাজ করছ, সেটা ঠিক কিনা যুক্তি দিয়ে খুঁজে দেখার।
অতএব
১। আন্দাজ করবে সর্বক্ষণ।
২। গোটা অঙ্কটা না পারলেও, এক্সপেরিমেন্ট করে যাবে ছোট ছোট মডেল বানিয়ে। (যেমন আমরা করেছি)। অবশ্যই গণিতজ্ঞের সব এক্সপেরিমেন্ট খাতায় কলমে হয়। কিন্তু তাই বলে তারা কিছু কম চিত্তাকর্ষক নয়।

উদাহরণ স্বরুপ বলি, আমরা আমাদের এক্সপেরিমেন্ট গুলোর থেকে আন্দাজ করছি যে 'ভাগশেষ' দের একটা অদ্ভুত মজার গুণ আছেঃ সংখ্যারা গুণ হয়ে গেলে তারাও গুণ হয়ে যায়। কিন্তু এটা সবসময় সত্যি কিনা তা প্রমাণ সাপেক্ষ। যতক্ষণ না প্রমাণটা হাতে কলমে হচ্ছে, ততক্ষণ বিভিন্ন সংখ্যা আর বিভাজক নিয়ে পরীক্ষা চালিয়ে নিয়ে যেতে হবে। তাহলেই তো বোঝা যাবে আসলে কি হচ্ছে।

শেষের এক্সপেরিমেন্টটা আমরা আরও একবার করব। কিন্তু সংখ্যা গুলো কে একটু পালটে নিয়ে।

বিভাজকঃ ১৪
সংখ্যা দুটোঃ ৫০, ৭২

৫০ ---- ১৪ দিয়ে ভাগ দিলে --- ৮ (ভাগশেষ)
৭২ ---- ১৪ দিয়ে ভাগ দিলে --- $\times$ ২ (ভাগশেষ)
------
৪৬ $\times$ ৭২ --- ১৪ দিয়ে ভাগ দিলে ১৬ (ভাগশেষ হওয়া উচিৎ যদি আমাদের ভাগশেষ গুণ হয়ে যাওয়ার নিয়মটা সত্যি হয়)।

কিন্তু তা কি করে হয়! কোনও সংখ্যা কে ১৪ দিয়ে ভাগ দিলে, ভাগশেষ কি ১৪র বেশি হতে পারে? কখোনই নয়। তাহলে কি আমাদের নিয়মটা অচল এক্ষেত্রে?

ঠিক তা নয়। ভাগশেষ দুটোকে গুণ করে যা পাওয়া গেল (১৬) তাকে আবার ১৪ দিয়ে ভাগ করে ফেলো। এবার ভাগশেষ পাচ্ছি ২।

এদিকে ৫০ কে ৭২ দিয়ে গুণ করলে ৩৬০০ হয়। তাকে ১৪ দিয়ে ভাগ দিলে ২৫৭ হচ্ছে ভাগ ফল আরে ২ হচ্ছে ভাগশেষ (যেমনটা চাই)।

এতগুলো এক্সপেরিমেন্ট থেকে যা পেলাম তাকে এবার সূত্রের আকারে লিখে ফেলা যাক।

উপপাদ্য ১.১

a এবং b হল যেকোনও দুট সংখ্যা। d হচ্ছে একটি বিভাজক। যদি a কে d দিয়ে ভাগ করলে R_1 ভাগশেষ থাকে এবং b কে d দিয়ে ভাগ করলে R_2 ভাগশেষ থাকে, তাহলে $a \times b$ কে d দিয়ে ভাগ করলে ভাগ শেষ হবে

ক। $R_1 \times R_2$ যদি এই ভাগশেষের গুণফলটা d চেয়ে ছোট হয়।
খ। যদি $R_1 \times R_2$, d এর চেয়ে বড় হয়ে যায়, তাহলে $R_1 \times R_2$ কে আবার d দিয়ে ভাগ করতে হবে।

এই উপপাদ্যের প্রমাণটা মোটেই জটিল নয়। কিন্তু একটু বীজগাণীতিক কায়দায় লিখতে হবে।
তার আগে একটা ছোট অঙ্ক করে নাওঃ

Author: Ashani Dasgupta
www.ccmscalcutta.org

২.৭ প্রমাণ করো যদি কোনও সংখ্যা M কে d দিয়ে ভাগ করলে, ভাগফল হয় Q এবং ভাগশেষ হয় R , তাহলে আমরা লিখতে পারিঃ $M = d \times Q + R$; অর্থাৎ

বিভাজ্য = (বিভাজক $\times$ ভাগফল) + ভাগশেষ

.

মোটের ওপর ব্যাপার হচ্ছে এই যে, a কে d দিয়ে ভাগ করলে, একটা ভাগফল পাওয়া যাবে। ধরা যাক সেই ভাগফলটা হচ্ছে Q_1 । তাহলে আমরা লিখতে পারিঃ

$$a = d \times Q_1 + R_1$$

একইভাবে আমরা লিখতে পারিঃ

$$b = d \times Q_2 + R_2$$

তাহলে

$$a \times b = (dQ_1 + R_1) \times (dQ_2 + R_2) = d^2 Q_1 Q_2 + dQ_1 R_2 + dQ_2 R_1 + R_1 R_2$$

অতএব

$$a \times b = d(dQ_1 Q_2 + Q_1 R_2 + Q_2 R_1) + R_1 R_2 \ \ldots \text{(সমীকরণ ১)}$$

এবার ঘটনা হচ্ছে, $a \times b$ কে d দিয়ে ভাগ করলে সমীকরণ ১ এর মত একটা সমীকরণ পাওয়া যাবেঃ $a \times b = dQ + R \ldots$ (সমীকরণ ২)

(১) আর (২) কে মিলিয়ে দেখলে, পাবো যে,

যদি $R_1 \times R_2$, d এর চেয়ে ছোটো হয়, তাহলে সেটাই R (ভাগশেষ)। আর যদি তা না হয়, তাহলে $R_1 \times R_2$ কে d দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ পাওয়া যাবে।

(প্রমাণ (অ) সমাপ্ত)

২.৮ উপপাদ্য ১ এর প্রমাণে, আমরা বেশ কয়েকটা ধাপ ছেড়ে ছেড়ে গেছি। সে গুলোকে পুর্ণ করো।

২.৯ দশ কে ৯ দিয়ে ভাগ দিলে ভাগশেষ হয় ১। তাহলে 10×10 কে ৯ দিয়ে ভাগ দিলে ভাগশেষ কত হবে উপপাদ্য ১.১ ব্যাবহার করে বলো।

২.১০ 10^{2017} কে ৯ দিয়ে ভাগ দিলে, ভাগশেষ কত হবে?