

প্রথম দিন

সংখ্যা অসংখ্য!

১, ২, ৩, ৪, ...

সংখ্যা সত্যিই অসংখ্য। একবার চলতে শুরু করলে, ১ ধাপ করে বাড়তেই থাকবে।

১ এর সঙ্গে ১ জুড়লে দুই। ২ এর সাথে আবার ১ জুড়লে তিন। এরকম এক পা এক পা করে হাঁটতে হাঁটতে, কত লক্ষ কত কোটি সংখ্যার জঙ্গল যে পেরিয়ে যাওয়া যায় তার ইয়ত্ন নেই।

এই মহাঅরণ্যে কতকগুলো সংখ্যা একটু হিংসুটে রকমের। এদের বলা হয় মৌলিক সংখ্যা। এরা মোটেই ভাগ হয়ে যেতে ভালোবাসে না।

যেমন ২, ৩, ৫, ৭, ... ২০১৭, ...

মৌলিক সংখ্যাকে ভাগ করতে গেলে বিপাকে পড়বে। একমাত্র সে নিজেই নিজেকে ভাগ করতে পারে। আর করতে পারে ১। কিন্তু এ বাদে, মৌলিক সংখ্যা আর কারোর বাগে আসে না।

১.১

প্রথম ২৫টা মৌলিক সংখ্যা পর, পর খুঁজে বার করো।

১.২

১ থেকে ১০০০ এর মধ্যে কতগুলো মৌলিক সংখ্যা আছে?

এক থেকে হাজারের মধ্যে কটা মৌলিক সংখ্যা আছে তাও গুনে গেঁথে বার করে ফেলা যায়। একটু খাটতে হবে ঠিকই। তবু আধ ঘন্টার পরিশ্রমেই বেড়িয়ে যাবে। কিন্তু ধরো যদি প্রশ্ন করি, ১ থেকে ১০ কোটির মধ্যে কতগুলো মৌলিক সংখ্যা আছে? অথবা ১ থেকে হাজার কোটির মধ্যে? নাঃ, বেশ কঠিন হয়ে যাবে কাজটা।

একটা কম্পিউটারেরও প্রচুর সময় লেগে যাবে।

জার্মান দেশের গণিতজ্ঞ গাউস, অত্যন্ত অল্প বয়েসে এই প্রশ্নটা নিয়ে খুব কষে ভাবনা চিন্তা করেছিলেন। অনেক খেটে খুটে উনি বললেন, ১ থেকে 'ক' অবধি $\frac{k}{ln k}$ থানা মৌলিক সংখ্যা থাকবে। নিতান্ত মন্দ ফর্মুলা বাতলাননি গাউস। আমরা কোনও একদিন ফর্মুলার প্রমাণটা কষে দেখব। আপাতত এত কঠিন একটা সমস্যার কথা না ভেবে একটা অপেক্ষাকৃত সহজ সমস্যার কথা ভাবা যাক।

মৌলিক সংখ্যাগুলোকে বাদ দিলে, আর যে সব সংখ্যা পড়ে থাকে, তারা কেমন?

তাদের বলে যৌগিক সংখ্যা।

যেমন ২০। যৌগিক সংখ্যাদের অন্যান্য সংখ্যা দিয়ে ভাগ করা যায়। এঁরা অত হিংসুটে নয়। ২০ কে যেমন ৫ দিয়ে ভাগ করা যায়। ১০ দিয়েও।

২০-র মত কতগুলো বিভাজক (ডিভিসর) আছে? ছোট থেকে বড় অবধি লিখে ফেলা যাক বিভাজক গুলো কে।

১, ২, ৪, ৫, ১০, ২০

কয়েকটা ব্যাপার খেয়াল করো:

- ২০ কে নিজের বিভাজক হিসেবে ধরা হয়েছে। যে কোনও সংখ্যা নিজের বিভাজক।
- ১ সমস্ত সংখ্যার বিভাজক।
- ২০-র বিভাজক গুলো কি পদ্ধতিতে বার করেছি? তেমন জটিল কিছু নয়। প্রথমে যেকোনো সংখ্যা দিয়ে ভাগ করার চেষ্টা করেছি। ভাগ গেলে ভালো নাহলে পরের সংখ্যা দিয়ে ভাগ করার চেষ্টা করেছি। এইভাবে ১ থেকে ২০ অবধি সমস্ত সংখ্যা দিয়ে ২০কে ভাগ করার পর যেগুলো দিয়ে পুরোপুরি ভাগ গেছে, সে গুলো লিখে নিয়েছি।

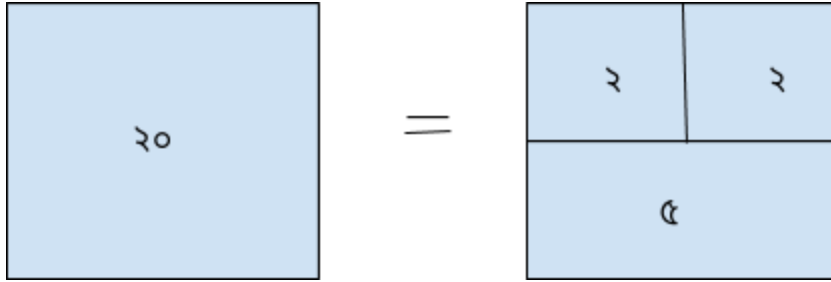
১.৩

২০১৭, ২৬, ৬৪, ৫২, ২৯

এই সংখ্যাগুলির সবকটা বিভাজক ছোট থেকে বড় ক্রমে লেখো।

মৌলিক সংখ্যা কে ইঁটের মত ভাবে পারো। যেমন ইঁট গেঁথে গেঁথে বাড়ি তৈরি হয়, তেমন মৌলিক সংখ্যা বুনে বুনে যৌগিক সংখ্যা বানানো যায়। অর্থাৎ যে কোনো যৌগিক সংখ্যাকে কতকগুলো মৌলিক সংখ্যার গুণফল হিসেবে লেখা যায়।

$$\text{যেমন } 20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5$$



মাথায় রাখতে হবে যে ইঁট গুলো 'গুণ' হয়ে যাচ্ছে।

১.৪ প্রমাণ করো যে মৌলিক সংখ্যাও সংখ্যায় অসীম। শেষ মৌলিক সংখ্যা বলে কিছু হয়না। (ইউক্লিড)

১.৫ প্রমাণ করো যে বর্গ সংখ্যা (যেমন ৪, ১৬, ৩৬, ৪৯) বাদ দিয়ে যে কোনও সংখ্যার বিভাজকের সংখ্যা জোড়। (যেমন ২০-র বিভাজক ছয়টা: ১, ২, ৪, ৫, ১০, ২০)।

১.৬ প্রমাণ করো যে বর্গ সংখ্যার (যেমন ৪, ২৫, ৬৪, ...) সবসময়ে বিজোড় সংখ্যক বিভাজক থাকে।

সংখ্যার মহানগরীতে মৌলিক সংখ্যারা হচ্ছে ইঁট। যৌগিক সংখ্যারা হল ইমারত। এবার এই মৌলিক সংখ্যাদের চিনে নেওয়ার একটা শক্ত পোক্ত উপায় খুঁজে নেওয়া দরকার। নচেৎ ইঁট আর ইমারতের ফারাক করা দায় হবে।

ইর্যাটোস্ফেনেস আলেক্সান্দ্রিয়ার প্রবাদপ্রতীম গ্রন্থাগারের প্রধান গ্রন্থাগারিক ছিলেন। খ্রীষ্টপূর্ব তিন শতক থেকেই এই গ্রন্থাগার দুনিয়ার সেরা পণ্ডিতদের আস্তানা। সেখানকার প্রধান গ্রন্থাগারিক হওয়া চাট্টিখানি কথা না।

ইর্যাটোস্ফেনেস, সংখ্যার জঙ্গল থেকে মৌলিক সংখ্যা চিনে নেওয়ার একটা উপায় বাতলালেন।

প্রথমে অনেক অনেক সংখ্যা পর পর লিখে ফেলো (যত খুশি)।

১ ২ ৩ ৪ ৫ ৬ ৭ ৮ ৯ ...

প্রথমেই ১ কে কেটে দাও (গণিতজ্ঞরা শলা পরামর্শ করে ঠিক করেছেন যে ১ কে মৌলিক বা যৌগিক, কিছুই বলা হবে না। কেমন এমনটা তারা ঠিক করলেন? আসলে এক এমন শূন্য একটু বিশেষ রকমের সংখ্যা। এদের ব্যবহার বুঝতে গেলে আরো খানিকটা বীজগণিত জানতে হবে। আর তারপরেই কারণটা বোঝা যাবে)।

১ ; ২ ৩ ৪ ৫ ৬ ৭ ৮ ৯ ...

এবার ২ কে কেটে না (২ হল প্রথম মৌলিক সংখ্যা। এবং একমাত্র জোড় মৌলিক সংখ্যা), কিন্তু ২ এর সব গুণিতক কে কেটে দাও (যেহেতু তারা ২ দিয়ে ভাগ যায়, অতএব তারা মৌলিক নয়)।

১ ২ ৩ ৪ ৫ ৬ ৭ ৮ ৯...

২ এর ঠিক পরেই কোন সংখ্যা আছে যে কাটা পরে নি? ৩। তাহলে ৩ হচ্ছে মৌলিক। ৩ কে কেটে না। কিন্তু ৩ সব গুণিতক কে কেটে ফেলো।

১ ২ ৩ ৪ ৫ ৬ ৭ ৮ ৯...

(৬ দুবার কাটা পড়ল, কিন্তু তাতে দোষ নেই।)

৩ এর ঠিক পরেই কোন সংখ্যা আছে যা কাটা পড়েনি? ৫। তাহলে পাঁচ মৌলিক।

এইভাবে চলতে থাকবে।

১.৭ ইর্যাটোস্টেনেসের পদ্ধতিতে ১ থেকে ২০০ অবধি মৌলিক সংখ্যা গুলি বার করো।

১.৮ ইর্যাটোস্টেনেসের পদ্ধতিতে আমরা কেন মৌলিক সংখ্যা পাই (যে সংখ্যা গুলো কাটা পড়েনি, সে গুলো কেন মৌলিক?)

Note :

In sieve of Eratosthenes, we start with number 2 and cross out every second number and then start with 3 (the uncrossed one) and cross out every third number and start with 5 (the uncrossed one) and cross out every fifth number and so on...